CORRECTION DÉTAILLÉE

Devoir Maison N°2

Mathématiques – Classe 1BACSF

Lycée SIDI AMER OUHALLI – AGHBALA

Professeur : H. Ait Issoumour

Table des matières

1 EXERCICE 1 : Suites Numériques

Données : Soit (u_n) une suite définie par :

$$u_0 = 2$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$$

1.1 Question 1 : Calculer u_1

Solution :
On utilise la relation de récurrence avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{5u_0}{2u_0 + 3} \\ &= \frac{5 \times 2}{2 \times 2 + 3} \\ &= \frac{10}{4 + 3} \\ &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

Réponse finale : $\boxed{u_1 = \frac{10}{7}}$

1.2 Question 2a : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

Solution :
Démonstration par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 0$

$$u_0 = 2 > 1 \quad \checkmark$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que $u_n > 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $u_{n+1} > 1$.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 3}$

Montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - 1 &= \frac{5u_n}{2u_n+3} - 1 \\
&= \frac{5u_n - (2u_n+3)}{2u_n+3} \\
&= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n+3} \\
&= \frac{3u_n - 3}{2u_n+3} \\
&= \frac{3(u_n - 1)}{2u_n+3}
\end{aligned}
$$

Puisque $u_n > 1$ (hypothèse de récurrence), on a :
— $u_n - 1 > 0$
— $2u_n + 3 > 0$ (car $u_n > 1 > 0$)
Donc $u_{n+1} - 1 > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

1.3 Question 2b : Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+3}$

Solution :
Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{5u_n}{2u_n+3} - u_n \\
&= \frac{5u_n - u_n(2u_n+3)}{2u_n+3} \\
&= \frac{5u_n - 2u_n^2 - 3u_n}{2u_n+3} \\
&= \frac{2u_n - 2u_n^2}{2u_n+3} \\
&= \frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+3} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Réponse finale : Formule vérifiée : $\boxed{u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+3}}$

1.4 Question 2c : Étudier la monotonie de la suite (u_n)

Solution :
D'après la question 2b : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+3}$

Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$:
— $2u_n > 0$ (car $u_n > 1 > 0$ d'après 2a)

— $2u_n + 3 > 0$ (car $u_n > 0$)
— $1 - u_n < 0$ (car $u_n > 1$ d'après 2a)
Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$
Par conséquent : $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Réponse finale : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

1.5 Question 3a : Montrer que (v_n) est géométrique

Données : On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Solution :
Calculons $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$$

$$\text{Avec } u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} :$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{\frac{5u_n}{2u_n+3} - 1}{\frac{5u_n}{2u_n+3}} \\ &= \frac{\frac{5u_n-(2u_n+3)}{2u_n+3}}{\frac{5u_n}{2u_n+3}} \\ &= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{5u_n} \\ &= \frac{3u_n - 3}{5u_n} \\ &= \frac{3(u_n - 1)}{5u_n} \end{aligned}$$

Or $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$, donc :

$$v_{n+1} = \frac{3}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n} = \frac{3}{5} \times v_n$$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{3}{5} v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul du premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Réponse finale : $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{3}{5} \text{ et de premier terme } v_0 = \frac{1}{2}}$

1.6 Question 3b : Exprimer v_n en fonction de n

Solution :
Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Réponse finale : $\boxed{v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

1.7 Question 3c : Déduire u_n en fonction de n

Solution :
On a : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$
Donc : $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$
D'où : $\dfrac{1}{u_n} = 1 - v_n$

$$u_n = \frac{1}{1 - v_n}$$

En remplaçant v_n par son expression :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\frac{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{2}} \\ &= \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n} \end{aligned}$$

Réponse finale : $\boxed{u_n = \dfrac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}}$

1.8 Question 4a : Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{5}{3}u_n$

Solution :
On a : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+3}$

Montrons que $u_{n+1} \leq \frac{5}{3}u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} \leq \frac{5}{3}u_n &\iff \frac{5u_n}{2u_n+3} \leq \frac{5}{3}u_n \\
&\iff 5u_n \leq \frac{5}{3}u_n(2u_n+3) \\
&\iff 15u_n \leq 5u_n(2u_n+3) \\
&\iff 15u_n \leq 10u_n^2 + 15u_n \\
&\iff 0 \leq 10u_n^2
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vraie car $u_n^2 \geq 0$.

Réponse finale : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \frac{5}{3}u_n}$

1.9 Question 4b : Déduire que $u_n \leq 2\left(\frac{5}{3}\right)^n$

Solution :
Démonstration par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 0$

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad 2\left(\frac{5}{3}\right)^0 = 2 \times 1 = 2$$

Donc $u_0 \leq 2\left(\frac{5}{3}\right)^0$ ✓

Hérédité : Supposons que $u_n \leq 2\left(\frac{5}{3}\right)^n$ pour un certain n.

D'après la question 4a : $u_{n+1} \leq \frac{5}{3}u_n$
En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &\leq \frac{5}{3} \times 2\left(\frac{5}{3}\right)^n \\
&\leq 2\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \quad ✓
\end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

1.10 Question 5 : Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

Solution :
(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2}$.

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est :

$$S_n = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{2}{5}} \\
&= \frac{1}{2} \times \left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right] \times \frac{5}{2} \\
&= \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

Réponse finale : $\boxed{S_n = \dfrac{5}{4}\left[1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]}$

1.11 Question 6 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

Solution :
On a : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$
Donc : $\dfrac{1}{u_n} = 1 - v_n$
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= \sum_{k=0}^{n-1}(1-v_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\
&= n - S_n
\end{aligned}$$

Avec $S_n = \dfrac{5}{4}\left[1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= n - \frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right] \\
&= n - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

Réponse finale : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = n - S_n = n - \frac{5}{4}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]}$

2 EXERCICE 2 : Suite Arithmétique

Données : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par :

$$u_1 = -1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3u_n + 2}$$

On pose : $v_n = \dfrac{2}{u_n}$

2.1 Question 1 : Calculer v_1

Solution :

$$v_1 = \frac{2}{u_1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Réponse finale : $\boxed{v_1 = -2}$

2.2 Question 2a : Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$

Solution :
Calculons $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1}}$$

Avec $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n + 2}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{2}{\frac{2u_n}{3u_n+2}} \\
&= 2 \times \frac{3u_n + 2}{2u_n} \\
&= \frac{3u_n + 2}{u_n} \\
&= \frac{3u_n}{u_n} + \frac{2}{u_n} \\
&= 3 + \frac{2}{u_n} \\
&= 3 + v_n
\end{aligned}$$

Donc : $v_{n+1} - v_n = 3$
La différence est constante, donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$.
Réponse finale : $\boxed{(v_n) \text{ est arithmétique de raison } r = 3}$

2.3 Question 2b : Déduire v_n et u_n en fonction de n

Solution :
Expression de v_n :
Puisque (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_1 = -2$:

$$
\begin{aligned}
v_n &= v_1 + (n-1)r \\
&= -2 + 3(n-1) \\
&= -2 + 3n - 3 \\
&= 3n - 5
\end{aligned}
$$

Expression de u_n :
Puisque $v_n = \dfrac{2}{u_n}$, on a :

$$u_n = \frac{2}{v_n} = \frac{2}{3n-5}$$

Réponse finale : $\boxed{v_n = 3n - 5 \quad \text{et} \quad u_n = \dfrac{2}{3n-5}}$

3 EXERCICE 3 : Barycentre et Géométrie Vectorielle

3.1 PARTIE I : Barycentre

Données : $ABCD$ est un parallélogramme. On considère les points G, I et J tels que :
— G est le barycentre de $(B;-4)$ et $(C;9)$
— I est le barycentre de $(A;3)$ et $(B;1)$
— J est tel que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

3.1.1 Question 1 : Montrer que J est le barycentre de C et D

Solution :
Méthode : Utilisation de l'écriture vectorielle et de la relation de Chasles

On a : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Étape 1 : Expression de $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$
Utilisons la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&= \left(\frac{2}{3} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Étape 2 : Utilisation de la propriété du parallélogramme
Dans le parallélogramme $ABCD$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

En substituant dans l'expression de $\overrightarrow{AJ}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AJ} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres par 3 :

$$3\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$$

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, donc :

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{AJ} &= 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) + 3\overrightarrow{AD} \\
&= 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AD} \\
&= 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

Identification avec la formule du barycentre :
On a obtenu : $3\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
Cette relation correspond à la définition du barycentre :
Si J est le barycentre de $(C;\alpha)$ et $(D;\beta)$, alors :

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{AJ} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$$

Par identification : $\alpha = 2$ et $\beta = 1$
Réponse finale : $\boxed{J \text{ est le barycentre de } (C;2) \text{ et } (D;1)}$

3.1.2 Question 2 : Montrer que I, J et G sont alignés

Solution :
Point I : barycentre de $(A;3)$ et $(B;1)$

$$4\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AA} + 1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

D'où : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Point G : barycentre de $(B;-4)$ et $(C;9)$

$$\begin{aligned}
5\overrightarrow{AG} &= -4\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC} \\
&= -4\overrightarrow{AB} + 9(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\
&= -4\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{BC} \\
&= 5\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{9}{5}\overrightarrow{BC}$
Dans le parallélogramme : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{9}{5}\overrightarrow{AD}$

Calculons $\overrightarrow{IJ}$ en utilisant la relation de Chasles par le point A :
Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$$

Or $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI}$, donc :

$$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$$

On sait que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\
&= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\
&= \left(\frac{8}{12} - \frac{3}{12}\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\
&= \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

Calculons $\overrightarrow{IG}$ en utilisant la relation de Chasles par le point A :

Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG}$$

Or $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI}$, donc :

$$\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AG}$$

On sait que (d'après les calculs précédents) :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{9}{5}\overrightarrow{AD}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IG} &= -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AG} \\
&= -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} + \frac{9}{5}\overrightarrow{AD} \\
&= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{9}{5}\overrightarrow{AD} \\
&= \left(-\frac{1}{4} + 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{9}{5}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{5}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{9}{5}\left(\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&= \frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}
\end{aligned}$$

D'où les points I, J et G sont alignés.

Réponse finale : $\boxed{\text{Les vecteurs } \overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{IG} \text{ sont colinéaires, donc } I, J \text{ et } G \text{ sont alignés.}}$

3.2 PARTIE II : Ensembles de Points

3.2.1 Question 1 : Ensemble $E_1 = \{M \,/\, \|\overrightarrow{3MA} - \overrightarrow{2MB}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{3MB}\|\}$

Solution :
Méthode : Utilisation du barycentre

On pose G_1 le barycentre de $(A;3)$ et $(B;-2)$:

$$(3-2)\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$$

On pose G_2 le barycentre de $(A;2)$ et $(B;-3)$:

$$(2-3)\overrightarrow{MG_2} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$$

$$-\overrightarrow{MG_2} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{MG_2} = 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}$$

L'équation devient :

$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_2}\|$$

Donc : $MG_1 = MG_2$

L'ensemble $E_1 = \{M \,/\, MG_1 = MG_2\}$ est la médiatrice du segment $[G_1G_2]$.
Or G_1 et G_2 sont alignés avec A et B sur la droite (AB).
Le milieu de $[G_1G_2]$ est le milieu de $[AB]$.
Réponse finale : $\boxed{E_1 \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$

3.2.2 Question 2 : Ensemble $E_2 = \{M \,/\, \|\overrightarrow{4MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\}$

Solution :
On pose G le barycentre de $(A;4)$ et $(B;1)$:

$$5\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$$

Donc : $\overrightarrow{4MA} + \overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$
L'équation devient :

$$\|5\overrightarrow{MG}\| = 3$$

$$5\|\overrightarrow{MG}\| = 3$$

$$\|\overrightarrow{MG}\| = \frac{3}{5}$$

$$MG = \frac{3}{5}$$

L'ensemble des points M tels que $MG = \frac{3}{5}$ est un cercle de centre G et de rayon $\frac{3}{5}$.

G est le barycentre de $(A;4)$ et $(B;1)$, donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$$

Réponse finale : $\boxed{E_2 \text{ est le cercle de centre } G \text{ (barycentre de } (A;4) \text{ et } (B;1)) \text{ et de rayon } r = \frac{3}{5}}$

Correction réalisée selon les orientations pédagogiques du système éducatif marocain
Professeur H. Ait Issoumour | Lycée SIDI AMER OUHALLI - AGHBALA | Classe 1BACSF